3 Spenninger i jord

3.1 Innledning

Spenningsberegning er et hovedtema i geoteknikken. Nesten uansett hvilke beregninger eller dimensjoneringer vi skal foreta i forbindelse med jord, må vi vite noe om *jordas spenningstilstand*.

Spenning er definert som *kraft per flateenhet* i selve jordmaterialet. Hvis terrenget påføres en ekstra last, vil spenningen i jorda forandre seg, og jorda reagerer på det. Her er det forskjellige forhold når det gjelder jordas oppførsel og reaksjon som må undersøkes.

Hvis vi kjenner

- de opprinnelige spenningene i jorda
- tilleggsspenninger på grunn av for eksempel en bygning
- jordas setningsparametrer og fasthetsparametrer

kan vi beregne setningene (deformasjonen av jorda under bygningen) og jordas bæreevne, stabilitet og horisontalspenninger (jordtrykket).

Som nevnt i kapittel 2 er jord et *trefaseelement* som består av mineralkorn, luft og vann. Mineralkornene er uregelmessig fordelt og omsluttet av porer. Porene er kontinuerlige og fylt med vann og/eller luft.

Når vi skal beregne setninger, bæreevne, stabilitet og jordtrykk, må vi ha kjennskap til hvordan spenningene fordeler seg i jorda. Vi må finne hvor store spenninger det er i kontaktflatene mellom mineralkornene, og hvor store spenninger det er i vannet i porene. Vi må med andre ord finne *kornkontakttrykket (effektivspenningen)* og *vanntrykket (poretrykket)*.

3.2 Definisjoner

Spenningstilstanden i jord er alltid i rommet (tredimensjonal), det vil si at det er spenninger i alle retninger nede i jorda, selv om vi betrakter en plan deformasjonstilstand (i «papirplanet»). I motsetning til i faget mekanikk regnes trykkspenninger i geoteknikken som positive, og positive skjærspenninger dreier mot urviseren (figur 3.1). Grunnen er blant annet at jord ikke kan ta opp strekk.



Figur 3.1 Definisjon av spenninger



Figur 3.2 Spenningsbetraktning på et element i dybden z

Vertikale spenninger betegnes som σ_z , og horisontale spenninger som σ_x (= σ_y). Dybden fra jordoverflaten til det stedet der spenningene beregnes, betegnes z. Hvis det for eksempel er et homogent materiale i hele dybden z med densitet ρ , så vil de totale vertikale spenningene på dybden z bli lik lasten av den overliggende massen per flateenhet over elementet.

Total last over elementet på figur 3.2 er volumet av jordsøylen over elementet multiplisert med tyngdetettheten, det vil si

$$G = A \cdot z \cdot \gamma \tag{3.1}$$

Lasten hviler på flaten A, og den vertikale totalspenningen blir derfor

$$\sigma_z = \frac{G}{A} = \frac{A \cdot z \cdot \gamma}{A} \quad \sigma_z = \gamma \cdot z = \rho \cdot g \cdot z \quad [kN/m^2] \quad (3.2)$$

3.3 Totalspenninger, effektivspenninger og poretrykk

Figur 3.3 viser en søyle av mettet jord med enhetstverrsnitt lik 1,0. Over terrenget er det vann med høyde h_w .

Total vertikalspenning σ_z i dybden z under terrengnivå er totalt vertikalt overlagringstrykk per flateenhet over punktet, og er sammensatt av tyngden av vann og jord over punktet, tilsvarende likning 3.2. Regnet ovenfra og nedover får vi

$$\sigma_{z} = \rho_{w} \cdot g \cdot h_{w} + \rho_{mettet} \cdot g \cdot z = \gamma_{w} \cdot h_{w} + \gamma_{mettet} \cdot z \quad (3.3)$$

der

- $\gamma_{\rm w} = \rho_{\rm w} \cdot g = \text{tyngdetettheten av vannet, som har densiteten}$ $\rho_{\rm w} = 1,0 \text{ g/cm}^3$, det vil si at $\gamma_{\rm w} \approx 10 \text{ kN/m}^3$
- $\gamma_{\text{mettet}} = \rho_{\text{mettet}} \cdot g = \text{mettet tyngdetetthet for jordmaterialene under grunnvannsnivå. } \rho_{\text{mettet}}$ er densiteten til jorda, beregnet i laboratorium, fra nivået under GV.

$$h_{\rm w}$$
 = dybden av frittstående vann over jorda

$$z$$
 = dybden fra terrengnivå og ned til beregningsnivået



Totalspenningen er det første vi regner ut ved spenningsberegninger, og likning 3.3 kan framstilles grafisk som vist på figur 3.4. Stigningen på diagrammet tilsvarer tyngdetettheten i tilsvarende nivå.



Figur 3.4 Totalspenningsdiagrammet vertikalt, σ_z

Totalspenningen σ_z i likning 3.3 kan deles i to bidrag:

- 1 En del av totallasten over dybden z bæres av vannet i porene. Porene er kontinuerlige fra grunnvannsnivået og nedover, og vanntrykket (= poretrykket) er likt i alle retninger. Vi regner ut poretrykket som punkt 2 i spenningsberegningene. Poretrykket representerer en oppdrift som materialet har etter Arkimedes' lov.
- 2 Den resterende delen av lasten må bæres av kreftene mellom jordpartiklene, det vil si av kornkontakttrykket (effektivspenningen). Vi beregner altså effektivspenningen til slutt.

Beregninger: Vannets løftekraft blir:

$$u = \rho_{w} \cdot g \cdot z_{w} = \gamma_{w} \cdot z_{w} (kN/m^{2})$$
(3.4)

Løftekraften er lik poretrykket, det vil si det hydrostatiske trykket i dybden z_w under grunnvannsnivået.

Poretrykket u i ethvert punkt nedover i jorda er lik stigehøyden z_w i et vannstandsrør, kalt *piezometerrør*, som er satt ned til punktet, multiplisert med tyngdetettheten. I grunnvannsnivået er dermed poretrykket lik null.

Poretrykket kan også presenteres grafisk som vist på figur 3.5, ved en rett linje med stigningsforhold $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$.



Figur 3.5 Poretrykksfordeling

Effektivspenningene i vertikal retning kan dermed uttrykkes som differansen mellom totalspenningene og poretrykket:

$$\sigma_z' = \sigma_z - u \tag{3.5}$$

Effektivspenning er lik totalspenning minus poretrykk.

Effektivspenningsdiagrammet skal vi se på i forbindelse med de følgende eksemplene.

Effektivspenningsprinsippet (likning 3.5) ble første gang vist av Terzaghi i 1925. Poretrykket u (likning 3.4) gir, som vi ser, et redusert kornkontakttrykk som tilsvarer oppdriften av det totale volumet under grunnvannsnivå. Denne oppdriften forutsetter videre at vannet kommer til på undersiden av kornene, det vil si at det finnes kontinuerlige porer overalt. Det er tilfellet for de fleste jordarter. En betongkloss som er støpt i vann mot fjell, vil imidlertid ikke få oppdrift (av den nevnte årsaken).

Vi ser at effektivspenningene (likning 3.5) avtar med økende poretrykk hvis totalspenningen σ_z er konstant.

Som vi senere skal se, er skjærfastheten i friksjonsjordarter avhengig av effektivspenningene. Det samme er setningsforholdene i jorda. Det er årsaken til at områder som skal benyttes til for eksempel hus- og veibygging, ofte blir drenert, det vil si at man senker grunnvannet for å øke skjærfastheten i jorda.

Vi skal se på noen eksempler på beregning av spenninger og se hvordan grunnvannsnivået virker inn på effektivspenningene.



Spenningsdiagrammene presenteres som tidligere nevnt grafisk, men av praktiske årsaker skal vi se at alle diagrammer bygges oppå hverandre i ett og samme diagram.

Figur 3.6 gir en illustrasjon av poretrykkets betydning. Figuren viser en avsetning av sand over fjell der GV ligger i tre ulike nivåer i forhold til terrenget, nemlig over terreng (i sjøen), i terreng (våtmark) og under terreng (normalt).

EKSEMPEL 3.1 Spenningsberegninger Vi skal først se på det enkleste tilfellet, der grunnvannet står i terved GV i terrengnivå (profil 1 på figur 3.6).

Gangen i beregningene blir slik:

1 Først regner vi ut totalspenningene etter likning 3.2: $\sigma_z = \rho \cdot g \cdot z = \gamma \cdot z$. Vi kan tegne totalspenningsdiagrammet når vi beregner σ_z på karakteristiske dybder (z), se figur 3.7. Ved homogene forhold får vi en rett linje.

Topp, kote 20: z = 0, $\sigma_z = 0$ Bunn, kote 10: z = 10 m, $\sigma_z = \gamma \cdot z = 10 \cdot 20 = 200$ kN/m²

2 Vi regner så ut poretrykket etter likning 3.4: $u = \rho_w \cdot g \cdot z_w \cdot z_w$ er avstanden fra GV og nedover. I dette tilfellet er $z_w = z$, ettersom GV er i terrengnivå. Vi kan nå tegne poretrykksdiagrammet separat, som vist på figur 3.7, eller vi kan avsette poretrykket ufra totalspenningene σ_z og tilbake mot null-linjen, som vist på samlediagrammet helt til høyre.

Topp: $z_w = 0$, u = 0Bunn: $z_w = 10$ m, $u = 10 \cdot 10 = 100$ kN/m²



Figur 3.7 Spenningsdiagrammer, delt og sammensatt, for profil 1 på figur 3.6

3 Vi regner ut effektivspenningene etter likning 3.5: $\sigma_z' = \sigma_z - u$, som er differansen mellom de to diagrammene. Vanlig praksis er at man tegner alle diagrammene samlet, som vist til høyre på figur 3.7. Dermed får vi oversikt over alle spenningstilstander i ett og samme diagram. For å lette oversikten ytterligere skraverer vi effektivspenningsdiagrammet σ_z' .

$$\sigma_{z}' = \sigma_{z} - u = \rho \cdot g \cdot z - \rho_{w} \cdot g \cdot z_{w}$$

Topp: $\sigma_{z}' = 0$ Bunn: $\sigma_{z}' = \sigma_{z} - u = 200 - 100 = 100 \text{ kN/m}^{2}$

NB! Det er viktig at diagrammene målsettes og påføres karakteristiske verdier.

EKSEMPEL 3.2 Spenninger ved GV under terrengnivå	Grunnvannet står i dybden $h = 2$ m under terrengnivå (profil 2 på figur 3.6). Dette er det vanligste tilfellet, og det er gjengitt på figur 3.8.
	Gangen i beregningene:
	1 Totalspenningen $\sigma_z = \rho \cdot g \cdot z = \gamma \cdot z$ er lineær med dybden. Egentlig vil ρ over GV være litt mindre enn ρ under GV på grunn av vannet i porene under GV, men det ser vi bort fra i dette eksemplet. Dybden z regnes alltid fra terrengoverflaten.
	Vi regner ut totalspenningen i karakteristiske punkter:
	Terreng: $z = 0$, $\sigma_z = 0$ Kote 21, GV: $z = 2$ m, $\sigma_z = 20 \cdot 2 = 40$ kN/m ² Kote 13: $z = 10$ m, $\sigma_z = 20 \cdot 10 = 200$ kN/m ²
	2 Poretrykket $u = \rho_{w} \cdot g \cdot z_{w} = \rho_{w} \cdot g \cdot (z - h) = \gamma_{w} \cdot (z - h)$ $u = 0 \text{ der } z_{w} = 0, \text{ det vil si ved } z = h.$
	Kote 21, GV: $z_w = 0$, $u = 0$. Dette gjelder alltid! Kote 13: $z_w = 8$ m, $u = 10 \cdot 8 = 80$ kN/m ²
	3 Effektivspenningen $\sigma_z' = \sigma_z - u = \rho \cdot g \cdot z - \rho_w \cdot g \cdot z_w = \gamma \cdot z - \gamma_w \cdot z_w$
	Topp: $\sigma_z' = 0$ Kote 21, GV: $\sigma_z' = 40 - 0 = 40 \text{ kN/m}^2$ Kote 13: $\sigma_z' = 200 - 80 = 120 \text{ kN/m}^2$



EKSEMPEL 3.3 Spenninger ved GV Til slutt skal vi se på tilfellet der vannstanden står over terrengnivå, over terrengnivå det vil si på bunnen av vannet (profil 3 på figur 3.6, gjengitt på figur 3.9). Gangen i beregningene: 1 Totalspenningen $\sigma_z = \gamma_w \cdot h_w + \gamma \cdot z = \text{total last per flate-}$ enhet av alt som befinner seg over dybden z. Topp vann: $\sigma_z = 0$ (ingen last) Bunn sjø, kote 18: last = 2 m vann = $\gamma_w \cdot h_w = 10 \cdot 2 =$ 20 kN/m² På fjell: last = 2 m fritt vann + 10 m jord = $\gamma_{w} \cdot h_{w} + \gamma \cdot z$ $= 10 \cdot 2 + 20 \cdot 10 = 220 \text{ kN/m}^2$ 2 Poretrykket $u = \rho_{w} \cdot g \cdot z_{w} = \rho_{w} \cdot g(h_{w} + z) = \gamma_{w}(h_{w} + z).$ Vi har hydrostatisk økning fra GV og nedover. Topp vann: u = 0Bunn sjø: $z_w = 2$ m, $u = \gamma_w \cdot z_w = 10 \cdot 2 = 20$ kN/m² På fjell: $z_w = 12 \text{ m}, u = 10 \cdot 12 = 120 \text{ kN/m}^2$ 3 Effektivspenningen $\sigma_z' = \sigma_z - u$. Topp: $\sigma_{z}' = 0$ Bunn sjø: $\sigma_{z}' = 20 - 20 = 0$ På fjell: $\sigma_{z'} = 220 - 120 = 100 \text{ kN/m}^2$



Figur 3.9 Spenningsfordeling i profil 3, figur 3.6

Resultatet blir helt likt det vi fant i eksempel 3.1, det vil si med GV i terrengnivå.

Ut fra dette kan vi slå fast at det ikke spiller noen rolle for effektivspenningen σ_z' om vannet er i terrengnivå, eller om det står i en høyde over terrengnivå. Vannet som står over terrengnivået, forårsaker et poretrykk som er like stort som totalspenningen, slik at tillegget i effektivspenningen σ_z' blir lik null.

EKSEMPEL 3.4	Vi skal her ta for oss et tilfelle fra virkeligheten med flere tallfestede		
	ociegninger.		
	Vi har en lagdelt avsetning med 4 m sand over 10 m leire. Grunn- vannstanden (GV) er midt i sandlaget, se figur 3.10. Innbrakte prøver til laboratoriet gav disse resultatene:		
	Sand: Densitet over $GV = \rho_1 = 1.9 \text{ g/cm}^3 = 1.9 \text{ t/m}^3$ Densitet under $GV = \rho_2 = 2.1 \text{ g/cm}^3 = 2.1 \text{ t/m}^3$		
	Leire: Densitet = $\rho_3 = 1.8 \text{ g/cm}^3 = 1.8 \text{ t/m}^3$		
	Beregn og tegn spenningsdiagrammene fra terreng og ned til		





Løsning:

I forbindelse med spenningsberegninger må vi regne ut verdiene for σ_z , u og σ_z' for karakteristiske punkter nedover i jorda, det vil si for de nivåene der vi får knekkpunkter på spenningsdiagrammene. Det skjer der densiteten forandrer seg, og/eller der GV befinner seg. Totalspenningen σ_z er summen av alle laster per flateenhet over det nivået vi skal undersøke. Det betyr at vi må foreta en fort-løpende summering av tyngden av hver kubikkmeter som befinner seg over punktet. Hvis densiteten ρ varierer, kan vi uttrykke dette slik:

$$\sigma_{z} = \rho_{1} \cdot g \cdot \Delta z_{1} + \rho_{2} \cdot g \cdot \Delta z_{2} + \dots$$

der ρ_1 er densiteten i lag 1 med tykkelse Δz_1 , ρ_2 er densiteten i lag 2 med tykkelse Δz_2 osv. $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Dette kan vi skrive slik:

$$\sigma_{z} = g \cdot \Sigma \rho \cdot \Delta z = 10 \cdot \Sigma \rho \cdot \Delta z = 10 (\rho_{1} \cdot \Delta z_{1} + \rho_{2} \cdot \Delta z_{2} + \ldots)$$

Kote 18,0:

 $z = 2,0 \text{ m}, z_{w} = 0$ $\sigma_{z} = \rho \cdot g \cdot z = 1,9 \cdot 10 \cdot 2,0 = 38 \text{ [(kN/m²]}$ u = 0 (i GV-nivå) $\sigma_{z}' = \sigma_{z} - u = 38 - 0 = 38 \text{ [kN/m²]}$ Kote 16,0:

$$z = 4,0 \text{ m} = \Delta z_1 + \Delta z_2, z_w = 2,0 \text{ m}$$

$$\sigma_z = g \cdot \Sigma \cdot \rho \cdot \Delta z$$

$$= 10(1,9 \cdot 2,0 + 2,1 \cdot 2,0)$$

$$= 10(3,8 + 4,2) = 10 \cdot 8 = 80 \text{ [kN/m^2]}$$

$$u = \rho_w \cdot g \cdot z_w = 1,0 \cdot 10 \cdot 2,0 = 20 \text{ [kN/m^2]}$$

$$\sigma' = \sigma_z - u = 80 - 20 = 60 \text{ [kN/m^2]}$$

Kote 6,0:

$$z = 14,0 = \Delta z_1 + \Delta z_2 + \Delta z_3$$

$$z_w = 12,0 \text{ m}$$

$$\sigma_z = g \cdot \Sigma \cdot \rho \cdot \Delta z$$

$$= 10(1,9 \cdot 2,0 + 2,1 \cdot 2,0 + 1,8 \cdot 10,0)$$

$$= 10(3,6 + 4,2 + 18)$$

$$= 10 \cdot 26 = 260 \text{ kN/m}^2$$

$$u = \rho \cdot g \cdot z_w = 1,0 \cdot 10 \cdot 12 = 120 \text{ [kN/m}^2\text{]}$$

$$\sigma_z' = \sigma_z - u = 260 - 120 = 140 \text{ [kN/m}^2\text{]}$$

Alle verdiene er tegnet inn i diagramform på figur 3.10.

3.4 Horisontale spenninger

Ser vi på et jordelement igjen (figur 3.11), ser vi at det er ingenting i veien for en vertikal sammentrykking av elementet, det vil si i zretning. I horisontal retning, derimot, har vi ingen muligheter for sammentrykking eller utvidelse så lenge vi har «uendelig» stor utstrekning til alle horisontale kanter med elementer som har samme horisontale påkjenning. Skal derfor ett element utvide seg, må naboelementet trykkes sammen. Det er ikke mulig så lenge vi ikke har for eksempel en forskyvelig vegg på den ene siden.



Figur 3.11 Illustrasjon av deformasjoner

3.6 Skjærfasthet

3.6.1 Innledning

Jordas skjærfasthet er den motstanden jorda yter mot å gå til brudd langs en indre glideflate. Enhver stabilitetsanalyse går i korthet ut på å sammenlikne den totale skjærspenningen langs en slik glideflate med den totale skjærfastheten i materialet langs den samme flaten, for dermed å bedømme stabiliteten eller sikkerheten mot brudd.

En god forståelse av jordas skjærfasthet er nødvendig for å analysere stabilitetsproblemer som bæreevne, skråningsstabilitet og jordtrykk mot bevegelige konstruksjoner.

La oss se på et par eksempler for å illustrere dette.

EKSEMPEL 3.7 Stabilitet og bæreevne for et byggverk

I dette tilfellet (figur 3.19) kan byggegrunnen under byggverket bli overbelastet, og det kan oppstå brudd langs den skisserte bruddflaten (glideflaten). Skjærspenningen langs flaten er da blitt større enn skjærfastheten.





EKSEMPEL 3.8 Stabilitet i skråning eller skjæring

Figur 3.20 viser et snitt gjennom en skråning eller skjæring. Også i dette tilfellet ser vi antydet at et eventuelt brudd vil skje langs en glideflate. Det blir brudd hvis skjærspenningen er større enn skjærfastheten i jorda langs den kritiske glideflaten.

I dette tilfellet kan det være en avlastning (ved skjæring) som har endret den opprinnelige likevektstilstanden.



EKSEMPEL 3.9 Jordtrykk

Med jordtrykket mot en konstruksjon (figur 3.21) mener vi vanligvis de horisontale kreftene som jorda utøver mot konstruksjonen (spuntvegg, kjellermur, støttemur osv.). Som forklart tidligere er størrelsen av jordtrykket avhengig av flere forhold, blant annet skjærfastheten i jorda og den horisontale bevegelsesmuligheten til konstruksjonen. De maksimale skjærspenningene oppstår også her langs et glideplan, som skissert på figur 3.21.



Figur 3.21 Jordtrykkspåkjenning mot en støttekonstruksjon

3.6.2 Analysemetoder

Enhver spenningsendring i et jordelement fører til endringer i poretrykket som med tiden blir utliknet. Effektivspenningene og skjærfastheten varierer derfor med tiden. Stabiliteten, bæreevnen og jordtrykket endrer seg tilsvarende. Vi er derfor prinsipielt nødt til å undersøke fasthetsforholdene ved forskjellige tidspunkter. I praksis undersøker vi to grensetilstander:

- byggetilstanden (korttidstilstanden)

- den stasjonære tilstanden

Det finnes flere ulike *analysemetoder* som kan anvendes når vi skal bestemme jordartenes skjærfasthet τ_f . De mest vanlige er:

s_u-analyse

Når vi bestemmer skjærfastheten som udrenert skjærfasthet

 $\tau_{\rm f} = s_{\rm u} \tag{3.9}$

kalles analysemetoden for korthets skyld s_u -analyse. s_u -analysen er bare en overslagsanalyse som begrenser seg til vurdering av leire i byggetilstand. s_u -analysen er en totalspenningsanalyse.

$a\varphi$ -analyse

Når vi bestemmer skjærfastheten som drenert skjærfasthet uttrykt ved Coulombs likning

$$\tau_{\rm f} = (a + \sigma') \tan \varphi \tag{3.10}$$

kalles analysemetoden for korthets skyld $a\varphi$ -analyse, selv om a = 0, for eksempel for løst lagret sand.

 $a\varphi$ -analyse anvendes i alle tidstilstander for alle materialer. $a\varphi$ -analysen er en effektivspenningsanalyse.

Ved $a\varphi$ -analyse er det viktig å anta riktig poretrykk eller beregne poretrykket u. Det er nemlig med i beregningen, ettersom $\sigma' = \sigma$ - u. Vi ser at økt poretrykk reduserer σ' og dermed også skjærfastheten τ_f .

	Jordart	Byggetilstand	Stasjonær tilstand
	Sand, grus	αφ-analyse skjønnsmessig vurdert poretrykk u.	αφ-analyse skjønnsmessig vurdert eller målt u.
	Silt (mellomjordarter)	$a\phi$ -analyse skjønnsmessig vurdert poretrykksendring $u + \Delta u$.	αφ-analyse skjønnsmessig vurdert eller målt <i>u</i> .
Leire	NC-leire OC-sprekkfri leire	$a\varphi$ -analyse skjønnsmessig vurdert $u + \Delta u$. s_u -analyse som overslag.	<i>a</i> φ-analyse skjønnsmessig vurdert eller målt <i>u</i> .
	OC-oppsprukket leire (tørrskorpeleire)	$a\phi$ -analyse skjønnsmessig vurdert $u + \Delta u$. s _u -analyse som overslag.	aφ-analyse med a = 0, skjønnsmessig vurdert eller niålt u.
	Fyllmasse	$a\varphi$ -analyse skjønnsmessig vurdert $u + \Delta u$.	αφ-analyse skjønnsmessig vurdert eller målt u.

